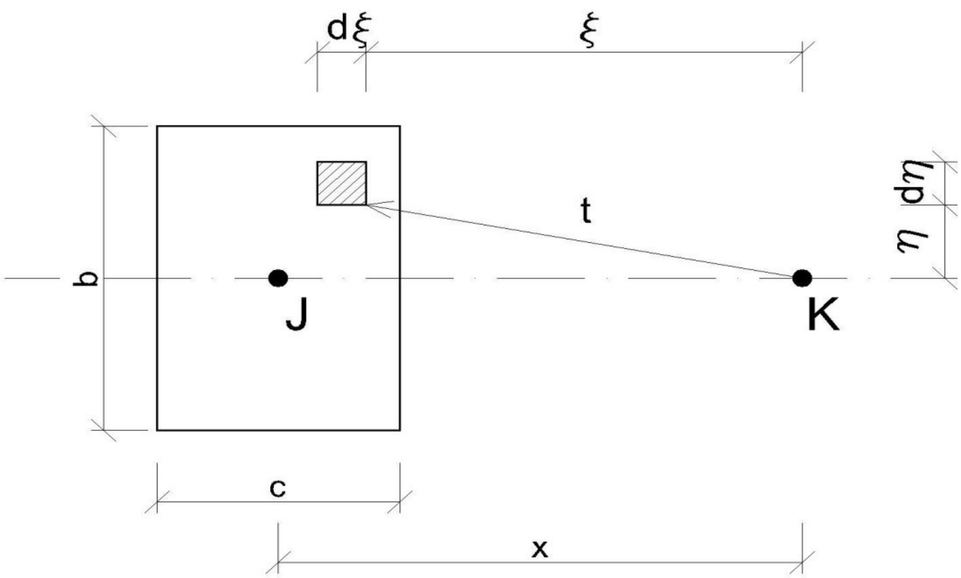
A. FORMIRANjE MATRICE FLEKSIBILNOSTI

A.1. Formiranje matrice fleksibilnosti tla integracijom Boussinesqu-ovog rješenja za slijeganje tačaka na površini poluprostora usled dejstva koncentrisane vertikalne sile

Definicija problema
Radi određivanja slijeganja proizvoljne podione tačke K izdvajamo jednu lamelu širine *c* koja pripada podionoj tački *J* i tražimo slijeganje tačke *K* koja se nalazi na podužnoj osi nosača na odstojanju *x* od težišta izdvojene lamele *(slika 1.).*



slika 1.

Ravnomjerno podijeljeno opterećenje biće q_i/b,gdje je *b* širina nosača. Uočimo beskonačno mali element na posmatranoj lameli dimenzija $d\xi$ i $d\eta$ sa koordinatama ξ i η u odnosu na tačku *K*. Sila koja djeluje na uočenom elementu jednaka je:

$$dP_i = \frac{q_i}{b} d\xi d\eta$$

Slijeganje tačke *K* usled djelovanja elementarne sile dP_i, prema Boussinesq-ovom izrazu biće:

$$dy_{ki} = \frac{1-\nu_0^2}{\pi \times E_0 \times r} \times \frac{q_i d\xi d\eta}{b}$$

Slieganje tačke *K*, usled djelovanja ravnomjernog podijeljenog opterećenja na površini izdvojene lamele, dobićemo integracijom gornjeg izraza :

$$ds_{ki} = \frac{\left(1-\nu_0^{\,2}\right) q_i d\xi d\eta}{\pi E_0 \sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

Posle izvršene integracije izraza i uvođenja oznaka:

$$\alpha = \frac{c}{b}; m = \frac{x}{c}$$

izraz za slijeganje tačke *K* možemo napisati u sledećem obliku:

$$s_{ki} = \frac{\left(1-\nu_0^{\,2}\right) q_i}{\pi E_o} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

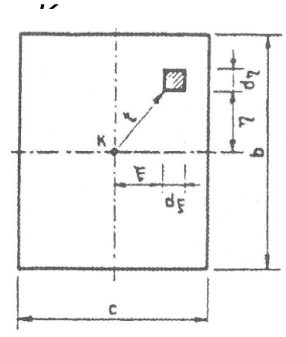
gdje je F_{ki} uticajna funkcija i data je izrazom:

$$F_{ki} = \alpha(2m+1) ArSh \frac{1}{\alpha(2m+1)} - \alpha(2m-1) ArSh \frac{1}{\alpha(2m-1)} +$$
$$+ ArSh\alpha(2m+1) - ArSh\alpha(2m-1)$$

Izraz za F_{ki} je izveden pod pretpostavkom da se tač
nalazi izvan opterećene površine. Ako se tačka *K* na
težištu opterećene površine *(slika 2.)*, funkcija F_{ki} in

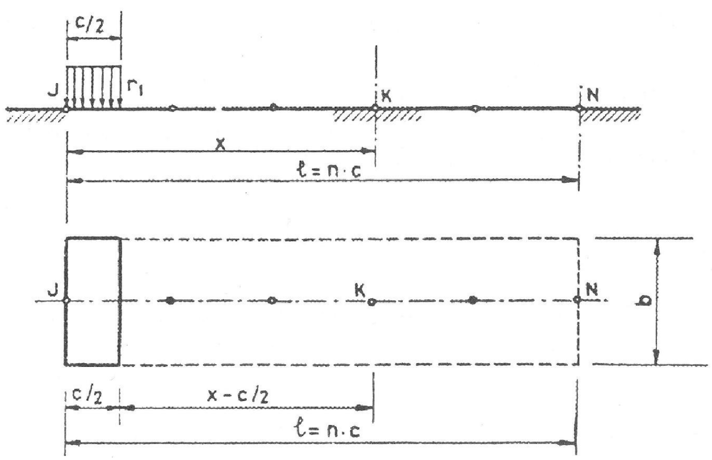
$$F_{kk} = 2(\alpha ArSh \frac{1}{\alpha} + ArSh\alpha)$$

Kada je poznata uticajna funkcija F_{ki} za neku tačku,s
te tačke može se odrediti pomoću izraza za $y_{ki.}$



slika 2.

Slijeganje neke tačke *K* podloge, date izrazom, odnosi se na slučaj kada se pritisak na podlogu prenosi preko lamele koja pripada podionoj tački koja se nalazi unutar posmatranog integracionog intervala. Ako se pritisak prenosi preko lamele koja pripada tački koja se nalazi na granici posmatranog intervala *(slika 3.)* uticajnu funkciju F_{ki} treba zamjeniti uticajnom funkcijom G_{ki}.



slika 3.

$$G_{ki} = 2\alpha m ArSh\frac{1}{2\alpha m} - \alpha(2m-1)ArSh\frac{1}{\alpha(2m-1)} +$$
$$+ ArSh(2\alpha m) - ArSh[\alpha(2m-1)]$$

Ako je $k = i$ tada je uticajna funkcija G_{ki} data sledećim izrazom:

$$G_{kk} = \alpha ArSh\frac{1}{\alpha} + ArSh\alpha$$

Kada su poznate numeričke vrijednosti uticajne funkcije G_{ki} slijeganje tačke *K* se može
odrediti pomoću izraza:

$$s_{ki} = \frac{1 - v_0^{\ 2}}{\pi E_0} b G_{ki} q_i$$

Slijeganje podloge u podionim tačkama možemo prikazati u sažetoj formi matričnom jednačinom:

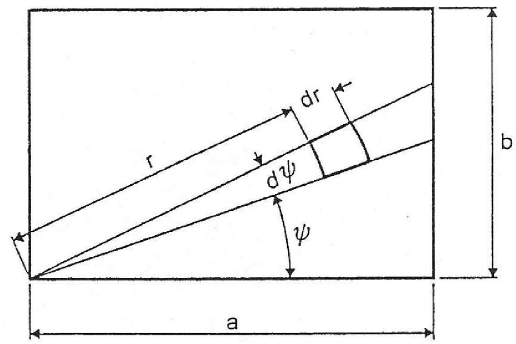
$$s_{ki} = \frac{\left(1 - v_0^{\ 2}\right) b\, q_i}{\pi E_o} F_{ki}$$

gdje $\frac{1 - v_0^{\ 2}}{\pi \cdot E_0} \cdot F_{ki}$ predstavlja matricu fleksibilnosti tla.

A.2. <u>Računanje vrijednosti elemenata matrice fleksibilnosti korišćenjem riješenja Steinbrener-a za prostiranje napona u tlu usled ravnomjernog opterećenja na pravougaonoj površini poluprostora</u>

Promjena naponskog stanja u tlu usled opterećenja dodatnim silama na površini ili na
relativno maloj dubini može se odrediti različitim aproksamitivnim postupcima jer je realnu
fizičku heterogenost materijala i njegovo složeno naponsko i deformaciono ponašanje
nemoguće obuhvatiti sa nekom apsolutnom tačnošću.
Rješenja i rezultati teorije elastičnosti se najčešće koriste za određivane napona u masi tla usled djelovanja spoljnih opterećenja. Pri tome se podrazumjeva linearna elastčnost, a većina korisnih rješenja pretpostavlja da je tlo homogeno i izotropno.
U građevinskoj praksi su opterećene površine ili temelji često pravougaonog oblika. Stoga za određivanje napona po pravougaonim površinama najpogodnije je razmotriti raspodjelu vertikalnih napona na vertikalnoj liniji koja prolazi kroz ugao pravougaonika, kao što je prikazano na *Slici 4.* U ovom slučaju je:

$$dQ = q \cdot dA = q \cdot r \cdot d\psi \cdot dr$$



Slika 4. Integrisanje uticaja po pravougaonoj opterećenoj površini

Integracijom se dobija relativno dug izraz, koji je izveo Steinbrener, a ima sledeći oblik:

$$\sigma_z = q \times J_z$$

gde je:
q - raspodeljeno površinsko opterećenje

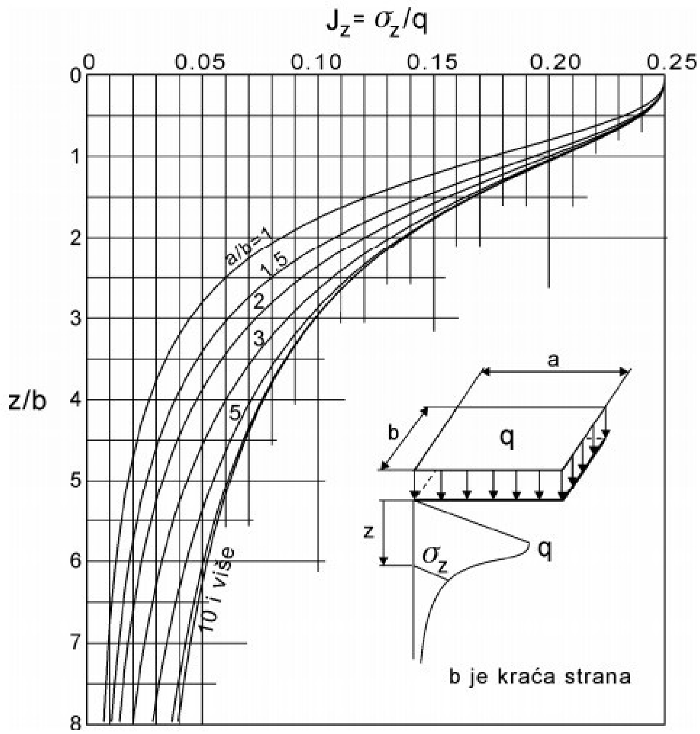
Jz –uticajni koeficijent koji zavisi od odnosa a/b pravougaone opterećene površine i dubine z :

$$J_z = \frac{1}{2\pi}\left(arctgA_1 + A_2 \right)$$

$$k = \frac{a \times b}{z^2};\ m = \frac{a^2}{z^2};\ n = \frac{b^2}{z^2};\ t = \sqrt{m+n+1};$$

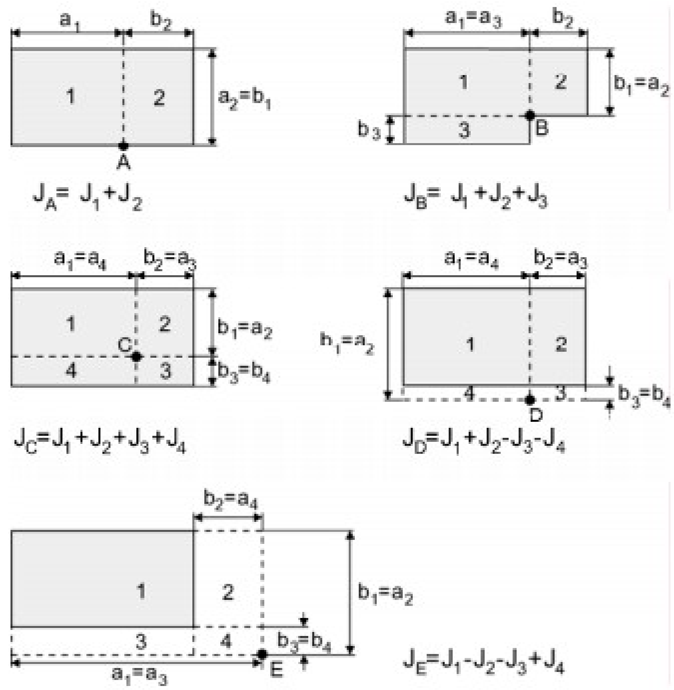
$$A_1 = \frac{k}{t};\ A_2 = \frac{A_1(m+n+2)}{(m+1)(n+1)}$$

Jz prikazan dijagramom u bezdimenzionalnom obliku



Slika 5. Steinbrener-ov dijagram za određivanje vertikalnih uticaja

Ukoliko se želi izračunati napon u bilo kojoj tački, koja leži na pomenutoj vertikali, opterećeno područje se izdjeli na odgovarajuće pravougaonike tako da se za svaki od dobijenih elementarnih pravougaonih površina, tačka nalazi ispod ugla svakog pravougaonika dojenog podjelom, a zatim se primjeni superpozicija ovih uticaja. Za svaki elementarni pravougaonik stranica b je uvijek kraća stranica elementarnog pravougaonika koji se koristi za izračunavanje bezdimenzionalnih odnosa a/b i z/b radi očitavanja uticajnog koeficijenta J_z za odgovarajući elementarni pravougaonik.



Slika 6. Primena superpozicije pri izračunavanju vertikalnih napona primenom rešenja Steinbrener-a

Vertikalno pomjeranje, slijeganje tačke na površini elastičnog poluprostora, može se dobiti integracijom:

$$s = \int_{0}^{Z\max} \varepsilon_z dz$$

Odnosno, veličina slijeganja se računa tako što se odrede vrednosti vertikalnih deformacija u nizu tačaka i izvrši numerička integracija deformacija do dubine $Z_{max.}$

Vertikalne deformacije se računaju:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta\sigma_z}{M_v}$$

gde je:

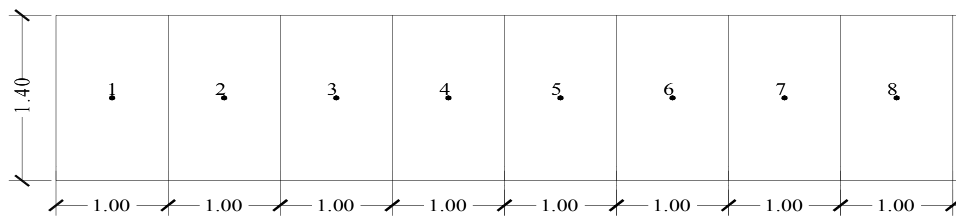
Δσz - priraštaj vertikalnog napona dobijen pomoću Steinbrener-ovog izraza

M_v – modul stišljivosti :

$$M_v = \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \times E$$

B. BROJNI PRIMERI

Potrebni ulazni podaci:
- Dužina temelja L=20.00m
- Širina naliježuće površine temelja B= 1.40m
- Modul deformacije tla E_0=25000kN/m^2
- Poissonov koeficijent ν_0=0.30
- Debljina deformabilnog sloja je H=6.00m
- Reaktivno opterećenje tla je r=280kN/m



- Zadato slijeganje krutog temelja je s=2.80cm.
- Podjelu nosača izvršiti na 20 jednakih segmenata.

B.1. <u>(Boussinesq) Sleganje podionih tačaka usled ravnomjernoraspodjeljenog opterećenja</u>

Podjela temelja na segmente

Nerealno tretiranje tla rešavamo nalažanjem zamjenjujućeg modula elastičnosti za realno tlo (E_0)

$$S=\int\frac{\Delta\sigma_{Zi}}{M_i}dz$$

- Realno slijeganje

$$\left.\begin{aligned} S_e &= \frac{1-\nu_0^2}{\pi\cdot E_0}\cdot\sum_{i=1}^{n}F_{ik}\cdot q_k \\ S &= S_e \end{aligned}\right]\Rightarrow E_0^*$$

E_0^* - Zamenjujuće E_0 traženog poluprostora

Do slijeganja smo dosli primjenom Steinbrener-ovog postupka na cjelokupnoj lameli za centralnu tačku a zatim smo do E_0^* dosli koristeći izraz :

$$s=\frac{\left(1-\nu_0^{\ 2}\right)\cdot P}{E_0\cdot F}\cdot B\cdot\alpha$$

gdje je:

s -sleganje temelja

ν_0 -Poissonov koeficijent tla

E_0 -moduo elastičnosti tla

P -ukupno opterećenje koje se prenosi preko temelja

F -veličina kontaktne površine

B -karakteristična dimenzija

α -koeficijent koji zavisi od oblika površine preko koje se prenosi opterećenje i položaja tačke za koju određujemo slijeganje.

α -koeficijent je uzet iz tabele i iznosi 2,53 pa je dobijena vrednost E_0^* =46203,47*KN/m2* i sa tom vrednošću ulazimo u dalji proračun korisćenjem gore navedenih formula.Proračun je urađen uz pomoć programskog paketa *Microsoft Excel* i dat je u prilozima tabelarno.

$$S = F \cdot r$$
$$F - matrica\ fleksibi\ln osti$$
$$S - sleganje\ cvornih\ tacaka$$
$$r - reaktivno\ cvorno\ opterecenje$$
$$r = F^{-1} \cdot S = K \cdot S$$
$$K = F^{-1} - matrica\ krutosti\ tla$$

B.2 <u>**(**Steinbrener) Slijeganje podionih tačaka usled ravnomjernoraspodjeljenog opterećenja</u>

Polazimo od Steinbrener-ovog izraza koji ima sledeći oblik:

$$J_z = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(arc\tan A_1 + A_2 \right)$$

gdje je :

$$A_1 = k/t \qquad\qquad A_2 = \frac{A_{1 \cdot (m+n+2)}}{(m+1) \cdot (n+1)}$$

$k = a \cdot b / z^2$ $m = a^2 / z^2$ $n = b^2 / z^2$ $t = (m + n + 1)^{1/2}$

Pa nam je :

$$\Delta\sigma_z = q / J_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta\sigma_z}{M_v}$$

gdje je:

$$M_v = \frac{1 - v}{(1 - 2v)(1 + v)} E_0$$

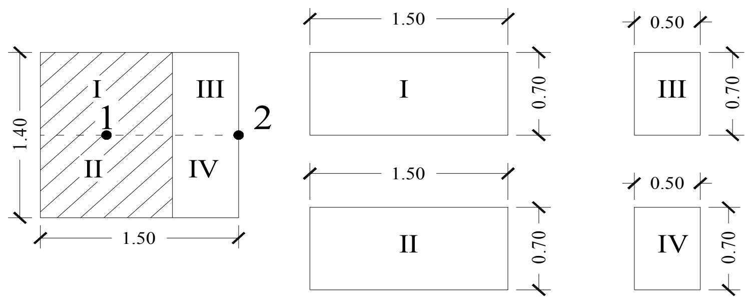
Na sledećim slikama pokazaćemo na koji način smo unosili vrijednosti u proračun:

S_{21}

Površine I i II

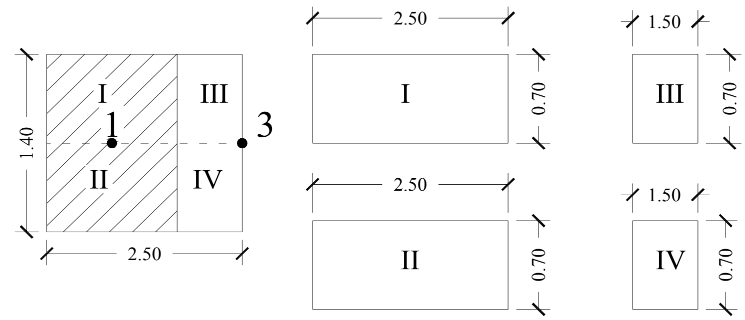
Površine III i IV

$a = 1.5\ m \quad b = 0.7\ m \qquad a/b = 2.142857$



$a = 0.7\ m \quad b = 0.5\ m \qquad a/b = 1.40$

S_{31}



Površine I i II

Površine III i IV

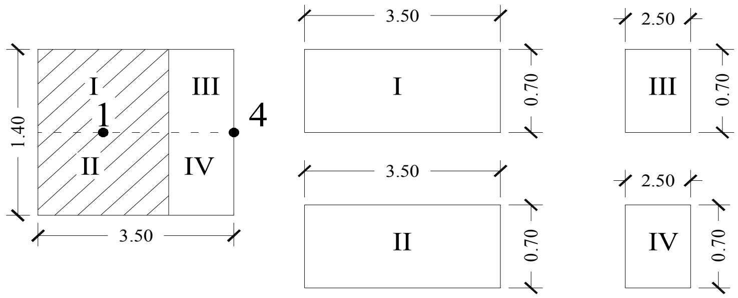
$a = 2.5\ m \quad b = 0.7\ m \qquad a/b = 3.571429$

$a = 1.5\ m \quad b = 0.7\ m \qquad a/b = 2.142857$

S_{41}

Površine I i II

Površine III i IV



$a = 3.5\ m \quad b = 0.7\ m \qquad a/b = 5 \qquad\qquad a = 2.5\ m \quad b = 0.7\ m \qquad a/b = 3.571429$

Na datim slikama je pokazano kako se mijenja a i b a ostatak proračuna je dat u prilogu.

$$S = F \cdot r$$

$$F - matrica\ fleksibilnosti$$

$$S - sleganje\ cvornih\ tacaka$$

$$r - reaktivno\ cvorno\ opterecenje$$

$$r = F^{-1} \cdot S = K \cdot S$$

$$K = F^{-1} - matrica\ krutosti\ tla$$