Bab 2

Distribusi Multivariat

2.1 Distribusi Bivariat

Definisi 1 (Vektor Acak Bivariat) *Diberikan percobaan acak dengan ruang sampel S. Misal X_1 dan X_2 variabel acak yang terdefinisi di S.* ***Vektor acak*** *bivariat adalah fungsi bernilai vektor di $\mathbb{R}^2$ yang terdefinisi pada ruang sampel S, dinotasikan dengan*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \textit{atau} \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2).$$

Ruang atau space dari $\mathbf{X}$ *adalah himpunan pasangan terurut yang beranggotakan semua nilai-nilai yang mungkin dari* $\mathbf{X}$,

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2); x_1 = X_1(c), x_2 = X_2(c), c \in S\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Contoh 1. Misal koin dengan permukaan gambar (G) dan angka (A), dan dadu dilantunkan secara bersamaan, maka ruang sampel percobaan acak tersebut adalah

$$\begin{aligned} S = \{&c_1 = (G,1), c_2 = (G,2), c_3 = (G,3), c_4 = (G,4), c_5 = (G,5), c_6 = (G,6), \\ &c_7 = (A,1), c_8 = (A,2), c_9 = (A,3), c_{10} = (A,4), c_{11} = (A,5), c_{12} = (A,6)\}. \end{aligned}$$

Jika X_1 variabel acak menyatakan permukaan koin dan X_2 menyatakan permukaan dadu, maka X_1 dan X_2 masing-masing dapat didefinisikan sebagai fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan

$$X_1(c) = \begin{cases} 1, & c = c_1, c_2, \ldots, c_6 \\ 0, & c = c_7, c_8, \ldots, c_{12} \end{cases} \qquad \text{dan} \quad X_2(c) = \begin{cases} 1, & c = c_1, c_7 \\ 2, & c = c_2, c_8 \\ 3, & c = c_3, c_9 \\ 4, & c = c_4, c_{10} \\ 5, & c = c_5, c_{11} \\ 6, & c = c_6, c_{12} \end{cases}$$

Misal $\mathcal{D}$ himpunan pasangan terurut yang didefinisikan sebagai

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2); x_1 = 0, 1 \text{ dan } x_2 = 1, 2, \ldots, 6\}$$

maka fungsi vektor $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} : S \to \mathcal{D}$, merupakan vektor acak bivariat. ■

Distribusi vektor acak dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi distribusi (cdf) gabungan. Definisi cdf gabungan hampir serupa dengan definisi cdf variabel acak. Perbedaan hanya terjadi pada domainnya saja, dari $\mathbb{R}$ menjadi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ atau $\mathbb{R}^2$.

Definisi 2 (Fungsi distribusi gabungan) *Fungsi distribusi (cdf) gabungan dari vektor acak* (X_1, X_2) *adalah fungsi yang terdefinisi di* $\mathbb{R}^2$ *yang memetakan setiap area* $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \in \mathbb{R}^2$ *ke* $F(x_1, x_2) \in [0, 1]$ *dengan aturan*

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$

dengan $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\})$.

Fungsi distribusi $F(x_1, x_2)$ dapat digunakan untuk menghitung peluang dari peristiwa $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \subset \mathcal{D}$, yaitu

$$P(a_1 < X_1 \leq b_1,\, a_2 < X_2 \leq b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$

Seperti pada variabel acak, distribusi vektor acak terbagi dua jenis, diskrit dan kontinu. Distribusi **diskrit** ditandai oleh ruang $\mathcal{D}$ yang berhingga atau tak berhingga tetapi *countable*. Sementara itu, distribusi **kontinu** ditandai oleh ruang $\mathcal{D}$ yang kontinu dan cdf gabungan yang kontinu.

Untuk kasus diskrit, distribusi vektor acak juga dapat dinyatakan dalam bentuk **pmf gabungan** yang didefiniskan sebagai berikut:

Definisi 3 (Fungsi peluang massa gabungan) *Misal* (X_1, X_2) *vektor acak dengan ruang* $\mathcal{D}$. *Fungsi massa peluang (pmf) gabungan didefinisikan sebagai fungsi*

$$p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

untuk setiap $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$, *yang memenuhi dua syarat:*

$$\text{(i).} \quad 0 \leq p(x_1, x_2) \leq 1 \qquad \text{dan} \qquad \text{(ii).} \quad \sum\sum_{(x_1, x_2) \in \mathcal{D}} p(x_1, x_2) = 1$$

Peluang dari peristiwa $B \subseteq \mathcal{D}$, dapat dihitung dengan menjumlahkan nilai-nilai pmf $p(x_1, x_2)$ di setiap (x_1, x_2) yang mungkin, yang berada di B, atau

$$P[(X_1, X_2) \in B] = \sum\sum_{(x_1, x_2) \in B} p(x_1, x_2).$$

Hubungan antara cdf gabungan dengan pmf gabungan adalah

$$F(x_1, x_2) = \sum_{w_1 \leq x_1} \sum_{w_2 \leq x_2} p(w_1, w_2)$$

Definisi 4 (pmf marjinal) *Misal vektor acak* (X_1, X_2) *mempunyai pmf gabungan* $p(x_1, x_2)$. *Jika* $\mathcal{D}_{X_1}$ *dan* $\mathcal{D}_{X_2}$ *masing-masing ruang untuk* X_1 *dan* X_2, *maka pmf marjinal untuk* X_1 *adalah*

$$p(x_1) = \sum_{x_2 \in \mathcal{D}_{X_2}} p(x_1, x_2), \quad x_1 \in \mathcal{D}_{X_1}$$

dan pmf marjinal untuk X_2 *adalah*

$$p(x_2) = \sum_{x_1 \in \mathcal{D}_{X_1}} p(x_1, x_2), \quad x_2 \in \mathcal{D}_{X_2}$$

Dengan kata lain, ketika penjumlahan pmf gabungan dilakukan hanya di sepanjang $x_2 \in \mathcal{D}_{X_2}$, pmf $p(x_1, x_2)$ merupakan fungsi dari x_1 saja dan fungsi tersebut disebut pmf marjinal untuk X_1. Sebaliknya, ketika penjumlahan pmf gabungan dilakukan hanya di sepanjang $x_2 \in \mathcal{D}_{X_1}$, pmf $p(x_1, x_2)$ merupakan fungsi dari x_2 saja dan fungsi tersebut disebut pmf marjinal untuk X_2.

Contoh 2. Berikut contoh pmf gabungan dari (X_1, X_2) dan pmf marjinalnya, $p_1(x_1)$ dan $p_2(x_2)$.

	x_1		
x_2	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

$\Rightarrow$

	x_1			
x_2	1	2	3	$p_2(x_2)$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
$p_1(x_1)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	

Dalam hal ini, pmf marjinal

$$p_1(x_1) = \begin{cases} p(1,1) + p(1,2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}, & \text{jika } x_1 = 1 \\ p(2,1) + p(2,2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}, & \text{jika } x_1 = 2 \\ p(3,1) + p(3,2) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}, & \text{jika } x_1 = 3, \end{cases}$$

dan

$$p_2(x_2) = \begin{cases} p(1,1) + p(2,1) + p(3,1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10}, & \text{jika } x_2 = 1 \\ p(1,2) + p(2,2) + p(3,2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}, & \text{jika } x_2 = 2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Definisi 5 (pdf gabungan) *Misal vektor acak (X_1, X_2) mempunyai cdf gabungan $F(x_1, x_2)$. Jika F kontinu dan terintegralkan terhadap x_1 dan x_2 maka fungsi*

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

disebut fungsi densitas peluang (pdf) gabungan dari (X_1, X_2).

Ciri-ciri dari pdf gabungan $f(x_1, x_2)$ adalah

$$\text{(i).} \quad f(x_1, x_2) \geq 0 \qquad \text{dan} \qquad \text{(ii).} \quad \iint_{(x_1,x_2)\in\mathcal{D}} f(x_1, x_2)\, dx = 1$$

Untuk kasus kontinu, cdf $F(x_1, x_2)$ dapat dinyatakan dalam bentuk integral lipat dua, yaitu

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(w_1, w_2)\, dw_1 dw_2$$

untuk setiap $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Sementara itu, peluang dari peristiwa $B \subseteq \mathcal{D}$, dapat dihitung dengan mengintegralkan pdf $f(x_1, x_2)$ di setiap (x_1, x_2) yang mungkin, yang berada di B, atau

$$P[(X_1, X_2) \in B] = \int\int_{(x_1,x_2)\in B} f(x_1, x_2)\ dx_1 dx_2.$$

Nilai $P[(X_1, X_2) \in B]$ dapat diinterpretasikan sebagai volume di bawah permukaan $z = f(x_1, x_2)$ yang dibatasi pada area B.

Contoh 3. Misalkan pdf dari vektor acak (X_1, X_2).

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 6x_1^2 x_2 & , 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0 & , x_1, x_2 \text{ lainnya,} \end{cases}$$

maka

$$\begin{aligned} P(0 < X_1 < \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{3} < X_2 < 2) &= \int_{1/3}^{2} \int_{0}^{3/4} f(x_1, x_2)\ dx_1 dx_2 \\ &= \int_{1/3}^{1} \int_{0}^{3/4} 6x_1^2 x_2\ dx_1 dx_2 + \int_{1}^{2} \int_{0}^{3/4} 0\ dx_1 dx_2 \\ &= \frac{3}{8} + 0 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Definisi 6 (pdf marjinal) *Misal (X_1, X_2) vektor acak dengan pmf gabungan $f(x_1, x_2)$. Jika $\mathcal{D}_{X_1}$ dan $\mathcal{D}_{X_2}$ masing-masing ruang untuk X_1 dan X_2, maka pdf marjinal untuk X_1 adalah*

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\ dx_2, \quad x_1 \in \mathcal{D}_{X_1}$$

dan pdf marjinal untuk X_2 adalah

$$f(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\ dx_1, \quad x_2 \in \mathcal{D}_{X_2}$$

Contoh 4. Misal X_1 dan X_2 mempunyai pdf gabungan

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & , 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & , x_1, x_2 \text{ lainnya} \end{cases}$$

maka pdf marjinal untuk X_1

$$f_1(x_1) = \int_0^1 (x_1 + x_2) dx_2 = x_1 + \tfrac{1}{2}, \quad 0 < x_1 < 1$$

dan 0 untuk yang lainnya.

Sementara itu, pdf marjinal untuk X_2

$$f_2(x_2) = \int_0^1 (x_1 + x_2)dx_1 = \tfrac{1}{2} + x_2, \quad 0 < x_2 < 1.$$

dan 0 untuk yang lainnya.

Peluang $P(X_1 \le \frac{1}{2})$ dapat dihitung berdasarkan $f(x_1, x_2)$ atau berdasarkan $f(x_1)$

$$P(X_1 \le \tfrac{1}{2}) = \int_0^{1/2} \int_0^1 f(x_1, x_2)\; dx_2 dx_1 = \int_0^{1/2} f_1(x_1)\, dx_2 = \int_0^{1/2} (x_1 + \tfrac{1}{2})\, dx_2 = \tfrac{3}{8}$$

Tetapi, untuk menghitung peluang $P(X_1 + X_2 \le 1)$ hanya dapat didasarkan pada pdf gabungan $f(x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \le 1) &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (x_1 + x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 \left[x_1(1 - x_1) + \frac{(1 - x_1)^2}{2} \right] dx_1 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_1^2 \right) dx_1 = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Ekspektasi. Konsep ekspektasi dari variabel acak dapat diperluas untuk kasus vektor acak. Sifat linieritas ekspektasi berlaku juga pada kasus vektor acak.

Definisi 7 (Ekspektasi fungsi dua variabel acak) *Misal* (X_1, X_2) *vektor acak dan* $Y = g(X_1, X_2)$ *fungsi bernilai real* ($g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

(a) Jika (X_1, X_2) *kontinu dan*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x_1, x_2)|\, f(x_1, x_2)\; dx_1 dx_2 < \infty,$$

maka $E[Y]$ *ada dan*

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f(x_1, x_2)\; dx_1 dx_2$$

(b) Jika (X_1, X_2) *diskrit dan*

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} |g(x_1, x_2)|\, f(x_1, x_2) < \infty,$$

maka $E[Y]$ *ada dan*

$$E[Y] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} g(x_1, x_2) f(x_1, x_2)$$

Teorema 1 (Ekspektasi sebagai operator linier) *Misal (X_1, X_2) vektor acak. Misalkan pula $Y_1 = g(X_1, X_2)$ dan $Y_2 = g(X_1, X_2)$ variabel-variabel acak yang mempunyai ekspektasi. Jika k_1, k_2 bilangan real sembarang, maka*

$$E[k_1Y_1 + k_2Y_2] = k_1E[Y_1] + k_2E[Y_2]$$

Misal (X_1, X_2) vektor acak. Ekspektasi $E[g(X_2)]$ dapat dihitung dalam dua cara:

$$E[g(X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_2)f(x_1, x_2)\ dx_1dx_2$$

atau

$$E[g(X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_2)f(x_2)\,dx_2.$$

Persamaan terakhir diperoleh karena

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_2)f(x_1, x_2)\ dx_1dx_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_2)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\ dx_1\right) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_2)f(x_2)\,dx_2.\end{aligned}$$

Contoh 5. Misal X_1 dan X_2 mempunyai pdf gabungan

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 8x_1x_2 & , 0 < x_1 < x_2 < 1 \\ 0 & ,\text{ untuk yang lainnya.}\end{cases}$$

Tentukan $E[X_1X_2^2]$, $E[X_2]$, dan $E[7X_1X_2^2 + 5X_2]$.

Penyelesaian. Berdasarkan Definisi 7,

$$\begin{aligned}E[X_1X_2^2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2^2f(x_1, x_2)\,dx_1dx_2 \\ &= \int_0^1\int_0^{x_2} (8x_1^2x_2^3)\ dx_1dx_2 = \int_0^1 \tfrac{8}{3}x_2^6\ dx_2 = \frac{8}{21},\end{aligned}$$

dan

$$E[X_2] = \int_0^1\int_0^{x_2} x_2(8x_1x_2)\ dx_1dx_2 = \int_0^1 x_2(4x_2^3)\,dx_2 = \frac{4}{5}.$$

Akibatnya,

$$E[7X_1X_2^2 + 5X_2] = 7E[X_1X_2^2)] + 5E[X_2] = (7)(\tfrac{8}{21}) + (5)(\tfrac{5}{4}) = \frac{20}{3}.$$

Contoh 6. Misal X_1 dan X_2 mempunyai pdf gabungan seperti pada Contoh 5. Jika $Y = X_1/X_2$, tentukan $E[Y]$ dengan dua cara, berdasarkan pdf marjinal dari Y, dan berdasarkan Definisi 7.

Penyelesaian. Lihat Hogg, et al. (2005, hal. 81).

Definisi 8 (Ekspektasi vektor acak) *Misal* $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ *vektor acak. Jika* $E[X_1]$ *dan* $E[X_2]$ *ada maka vektor*

$$E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{pmatrix}$$

disebut nilai ekspektasi dari vektor acak $\mathbf{X}$.

Mean dan matriks variansi-kovariansi. Misal $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ vektor acak. Jika mean $\mu_1 = E[X_1]$ dan $\mu_2 = E[X_2]$ ada, maka vektor

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{pmatrix}$$

disebut mean dari $\mathbf{X}$, dan matriks

$$\mathrm{Cov}(X) = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})']$$

disebut matriks variansi-kovariansi dari vektor acak $\mathbf{X}$.

Definisi 9 (mgf vektor acak) *Misal* $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ *vektor acak. Jika* $E[e^{t_1X_1+t_2X_2}]$ *ada untuk* $|t_1| < h_1$ *dan* $|t_2| < h_2$, *dengan* h_1 *dan* h_2 *bilangan real positif, maka*

$$M(t_1, t_2) = E[e^{t_1X_1+t_2X_2}]$$

disebut fungsi pembangkit momen (mgf) dari $\mathbf{X}$.

Seperti pada variabel acak, jika mgf dari $\mathbf{X}$ ada maka mgf menentukan distribusi dari $\mathbf{X}$ secara tunggal. Dalam notasi vektor, mgf dari $\mathbf{X}$ dapat ditulis

$$M(\mathbf{t}) = E[e^{\mathbf{t}'\mathbf{X}}]$$

dengan $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$.

Dari Definisi 9, mgf marjinal untuk X_1 dan X_2 masing-masing dapat dinyatakan sebagai $M(t_1) = M(t_1, 0)$ dan $M(t_2) = M(0, t_2)$.

Contoh 7. Misal X dan Y variabel acak dengan pdf gabungan

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & , 0 < x < y < \infty \\ 0 & , x, y \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Tentukan mgf marjinal dan pdf marjinal untuk X dan Y.

Penyelesaian. Dari Definisi 9, mgf dari X dan Y adalah

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= \int_0^\infty \int_x^\infty \exp(t_1 x + t_2 y - y)\ dydx \\ &= \frac{1}{(1 - t_1 - t_2)(1 - t_2)} \end{aligned}$$

dengan syarat $t_1 + t_2 < 1$ dan $t_2 < 1$.

Akibatnya, mgf marjinal untuk X dan Y adalah

$$\begin{aligned} M(t_1, 0) &= \frac{1}{1 - t_1}, \quad t_1 < 1 \\ M(0, t_2) &= \frac{1}{(1 - t_2)^2}, \quad t_2 < 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan pdf gabungannya, pdf marjinal untuk X adalah

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x, y)\, dy = \int_x^\infty e^{-y}\, dy = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$$

dan 0 untuk x lainnya. Sementara itu, pdf marjinal untuk Y adalah

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^\infty f(x, y)\, dx = \int_0^y e^{-y}\, dy = e^{-y} \int_0^y dy = ye^{-y}, \quad 0 < y < \infty.$$

dan 0 untuk y lainnya.

Latihan

1. Misal pdf dari X_1 dan X_2 adalah $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2$, $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$, dan 0 untuk yang lainnya. Tentukan $P(0 < X_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < X_2 < 1)$, $P(X_1 = X_2)$, $P(X_1 < X_2)$, dan $P(X_1 \leq X_2)$.
   Petunjuk. $P(X_1 = X_2)$ dapat diinterpretasikan sebagai volume di bawah permukaan $f(x_1, x_2) = 4x_1x_2$ dan di atas garis $0 < x_1 = x_2 < 1$ pada bidang x_1x_2.

2. Misal $\mathcal{D}$ ruang dari vektor acak (X_1, X_2). Misalkan pula $A_1 = \{(x, y) : x \leq 2, y \leq 4\}$, $A_2 = \{(x, y) : x \leq 2, y \leq 1\}$, $A_3 = \{(x, y) : x \leq 0, y \leq 4\}$, dan $A_4 = \{(x, y) : x \leq 0, y \leq 1\}$ merupakan subset dari $\mathcal{D}$. Jika $P(A_1) = \frac{7}{8}$, $P(A_2) = \frac{4}{8}$, $P(A_3) = \frac{3}{8}$, dan $P(A_4) = \frac{2}{8}$, tentukan $P(A_5)$ dengan $A_5 = \{(x, y) : 0 < x \leq 2, 1 < y \leq 4\}$.

3. Misal pdf dari X dan Y adalah $f(x, y) = e^{-x-y}$, $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, dan 0 untuk yang lainnya. Jika $Z = X + Y$, tentukan $P(Z \leq 0)$, $P(Z \leq 6)$, dan secara umum $P(Z \leq z)$, untuk $0 < z < \infty$. Tentukan pula pdf dari Z.

4. Misal pdf dari X dan Y adalah $f(x, y) = 1$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, dan 0 untuk yang lainnya. Tentukan cdf dan pdf dari dari $Z = XY$.

5. Misal 13 kartu diambil secara acak dan tanpa pengembalian dari satu set kartu remi. Jika X menyatakan banyaknya $\spadesuit$ di antara 13 kartu yang terambil, tentukan pmf dari X. Selanjutnya, jika Y menyatakan banyaknya $\heartsuit$ di antara 13 kartu yang terambil, tentukan $P(X = 2, Y = 5)$. Tentukan pula pmf gabungan dari X dan Y.

6. Misal variabel acak X_1 dan X_2 mempunyai pmf gabungan berikut:

(x_1, x_2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
$f(x_1, x_2)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

   dan $f(x_1, x_2) = 0$ untuk yang lainnya.

   (a) Tulis peluang-peluang tersebut dalam bentuk tabel seperti pada Contoh 2. Lengkapi tabel tersebut dengan pdf marjinal untuk X_1 dan X_2.

   (b) Hitung $P(X_1 + X_2 = 1)$

7. Misal X_1 dan X_2 mempunyai pdf gabungan $f(x_1, x_2) = 15x_1^2 x_2$, $0 < x_1 < x_2 < 1$, dan 0 untuk yang lainnya. Tentukan pdf marjinal untuk X_1 dan X_2, dan hitung $P(X_1 + X_2 \leq 1)$.

8. Misal X_1 dan X_2 mempunyai pmf gabungan $p(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)/12$, untuk $x_1 = 1, 2$, $x_2 = 1, 2$, dan 0 untuk yang lainnya. Hitung $E[X_1]$, $E[X_1^2]$, $E[X_2]$, $E[X_2^2]$, dan $E[X_1 X_2]$. Apakah $E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$? Tentukan $E[2X_1 - 6X_2^2 + 7X_1 X_2]$.

9. Misal X_1 dan X_2 dua variabel acak dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2) = 4x_1 x_2$, $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$, dan 0 untuk yang lainnya. Hitung $E[X_1]$, $E[X_1^2]$, $E[X_2]$, $E[X_2^2]$, dan $E[X_1 X_2]$. Apakah $E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$? Tentukan $E[3X_2 - 2X_1^2 + 6X_1 X_2]$.

10. Misal X_1 dan X_2 dua variabel acak dengan pmf gabungan $p(x_1, x_2) = (1/2)^{x_1 + x_2}$, untuk $x_1, x_2 = 1, 2, 3, \ldots$, dan 0 untuk yang lainnya. Tentukan mgf gabungan dari X_1 dan X_2. Tunjukkan bahwa $M(t_1, t_2) = M(t_1, 0)M(0, t_2)$.

11. Misal X_1 dan X_2 dua variabel acak dengan pdf gabungan $f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_2}$, untuk $0 < x_1 < x_2 < \infty$, dan 0 untuk yang lainnya. Tentukan mgf gabungan dari X_1 dan X_2. Tunjukkan bahwa $M(t_1, t_2) = M(t_1, 0)M(0, t_2)$.

12. Misal X dan Y mempunyai pdf gabungan $f(x, y) = 6(1 - x - y)$, $x + y < 1$, $x > 0$, $y > 0$, dan 0 untuk yang lainnya. Hitung $P(2X + 3Y < 1)$ dan $E[XT + 2X^2]$.