1. Medan vektor pada $\mathbb{R}^2$ didefinisikan oleh

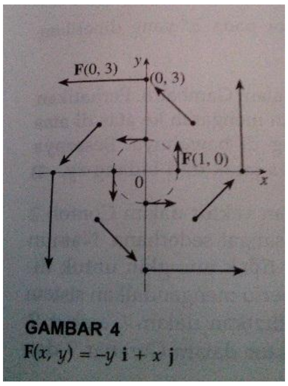
   $F(x, y) = -y\ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j}$

   Deskripsikan F dengan mensketsakan beberapa vektor $F(x, y)$

   (James Stewart. *Kalkulus Edisi Keempat* : 513)

   **Penyelesaian :**

   Karena $F(1,0) = \mathbf{j}$, kita gambarkan vektor $j = \prec 0,1 \succ$ dimulai di titik $(0,1)$. Karena $F(0,1) = -\mathbf{i}$, kita gambarkan vektor $\prec -1,0 \succ$ dengan titik awal $(0,1)$. Dengan melanjutkan cara ini, kita gambar sejumlah vektor perwakilan untuk menyatakan medan vektor dalam Gambar 4.

   Nampak bahwa tiap anak panah menyinggung lingkaran yang berpusat di titik asal. Untuk membenarkan ini, kita ambil hasilkali titik dari vektor posisi $x = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j}$ dengan vektor $F(x) = F(x, y)$ :

   $$x\ .\ F(x)\ =\ (x\ \mathbf{i}\ + y\ \mathbf{j}).(-y\ \mathbf{i}\ + x\ \mathbf{j})$$
   $$= -xy + yx = 0$$

   Ini memperlihatkan bahwa $F(x, y)$ tegak lurus terhadap vektor posisi $\prec x, y \succ$ dan karena itu menyinggung lingkaran yang berpusat di titik asal dan berjari-jari $|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Perhatikan pula bahwa

   $$|F(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |x|$$

   Sehingga besarnya vektor $F(x, y)$ sama dengan jari-jari lingkaran.

2. Jika $\mathbf{F}(x, y, z) =\ xz\ \mathbf{i} + xyz\ \mathbf{j} - y^2\ \mathbf{k}$. Carilah curl **F**.

   (James Stewart. *Kalkulus Edisi Keempat* : 552)

   Penyelesaian :

$$\text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y.}(xy)\right]\mathbf{k}$$

$$= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\mathbf{j} + (yz - 0)\mathbf{k}$$

$$= -y(2 + x)\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

3. a. Perlihatkan bahwa $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$ adalah medan vektor konservatif.

b. Carilah fungsi $f$ sedemikian rupa sehingga $\mathbf{F} = \nabla f$

(James Stewart. *Kalkulus Edisi Keempat* : 554)

**Penyelesaian :**

a. Kita hitung curl F :

$$\text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\,\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\mathbf{k}$$

$$= 0$$

Karena Curl $\mathbf{F} = 0$ dan daerah asal $\mathbf{F}$ adalah $\mathbb{R}^3$, maka menurut teoram 4, F adalah medan vektor konservatif.

b. Teknik untuk mencari $f$ adalah sebagai berikut

$$f_x(x, y, z) = y^2z^3 \qquad \ldots(1)$$

$$f_y(x, y, z) = 2xyz^3 \qquad \ldots(2)$$

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 \qquad \ldots(3)$$

Dengan mengintegralkan (1) terhadap $x$, kita dapatkan :

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z) \qquad \ldots(4)$$

Dengan mendiferensialkan (4) terhadap $y$, kita dapatkan $f_y(x,y,z) = 2xyz^3 + g(y,z)$, sehingga perbandingan dengan (2) memberikan $g_y(y,z) = 0$. Jadi $g(y,z) = h(z)$ dan

$$f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2 = h'(z)$$

Kemudian (3) memberikan $h'(z) = 0$. Karena itu

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + K$$

4. Jika $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, carilah div $\mathbf{F}$.

   (James Stewart. *Kalkulus Edisi Keempat* : 555)

   **Penyelesaian :**

   Bedasarkan definisi divergensi, kita mempunyai

   $$\text{div } \mathbf{F} = \nabla . \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2)$$

   $$= z + xz$$

5. Tentukan curl F dan div(curl F) dari medan vektor,

   $$F(x,y,z) = (y + xe^{yz})\mathbf{i} + (z + ye^{yz})\,\mathbf{j} + (xy + ze^{yz})\mathbf{k}$$

   (Prayudi. *Kalkulus Lanjut* : 240)

   **Penyelesaian :**

   Dari medan vektor F, dihasilkan :

   $M(x,y,z) = y + xe^{yz}$

   $N(x,y,z) = z + ye^{yz}$

   $R(x,y,z) = xy + ze^{yz}$

   Menurut definisi, curl medan vektor F diberikan oleh :

   $$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + xe^{yz} & z + ye^{yz} & xy + ze^{yz} \end{vmatrix}$$

   $$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy + ze^{yz}) - \frac{\partial}{\partial z}(z + ye^{yz}\,)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy + ze^{yz}) - \frac{\partial}{\partial z}(y + xe^{yz})\right)\mathbf{j}$$

   $$\left(\frac{\partial}{\partial x}(z + ye^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y}(y + xe^{yz})\right)\mathbf{k}$$

   $$= [(x + z^2e^{yz} - (1 + y^2e^{yz})]\mathbf{i} - [y - (xye^{yz})]\mathbf{j} + [0 - (1 + xze^{yz})]\mathbf{k}$$

$$= (x - 1 + z^2 e^{yz} - y^2 e^{yz})\mathbf{i} + (xye^{yz} - y)\mathbf{j} - (1 + xze^{yz})\mathbf{k}$$