contoh soal dan pembahasan integral lipat 2

berikut ini adalah contoh soal beserta pembahasan-nya

CONTOH 1 Hitung $\iint_D (2x+y)\,dA$ dengan $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$.

Penyelesaian

Integralkan dulu bagian dalam terhadap y (anggap x konstanta), hasilnya kemudian integralkan terhadap x.

$$\iint_D (2x+y)\,dA = \int_0^2 \int_0^1 (2x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 [2xy + \tfrac{1}{2}y^2]_0^1\,dx = \int_0^2 (2x+\tfrac{1}{2})\,dx = [x^2 + \tfrac{1}{2}x]_0^2 = 5$$

CONTOH 2 Hitung $\int_0^3 \int_1^2 (x^2 y + xy^2)\,dx\,dy$.

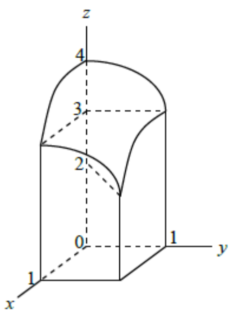
Penyelesaian

$$\int_0^3 \int_1^2 (x^2 y + xy^2)\,dx\,dy = \int_0^3 [\tfrac{1}{3}x^3 y + \tfrac{1}{2}x^2 y^2]_1^2\,dy$$

$$= \int_0^3 [\tfrac{7}{3}y + \tfrac{3}{2}y^2]\,dy = [\tfrac{7}{6}y^2 + \tfrac{1}{2}y^3]_0^3 = 24$$

CONTOH 3 Tentukan volume bangun di bawah permukaan $z = 4 - x^2 - y^2$ yang berada di atas bidang $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

Penyelesaian



Bangun di bawah permukaan $z = 4 - x^2 - y^2$ yang berada di atas bidang $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ adalah seperti pada **Gambar 5.2** di samping. Volume bangun tersebut adalah

$$V = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dA = \int_0^1 \int_0^1 (4 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 [4y - x^2 y - \tfrac{1}{3}y^3]_0^1\,dx = \int_0^1 (\tfrac{11}{3} - x^2)\,dx$$

$$= [\tfrac{11}{3}x - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{10}{3}$$

CONTOH 4 Hitung $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\,dy\,dx$.

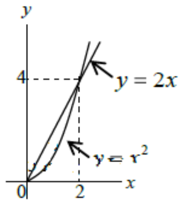
Penyelesaian

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy\,dy\,dx = \int_0^2 [\tfrac{1}{2}xy^2]_{x^2}^{2x}\,dx = \int_0^2 (2x^3 - \tfrac{1}{2}x^5)\,dx = [\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{12}x^6]_0^2 = \tfrac{8}{3}.$$

CONTOH 5 Tentukan luas daerah D yang dibatasi oleh $y = 2x$ dan $y = x^2$.

Penyelesaian

Dari skets daerah pengintegralan diperoleh



$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ \ x^2 \le y \le 2x\}$$

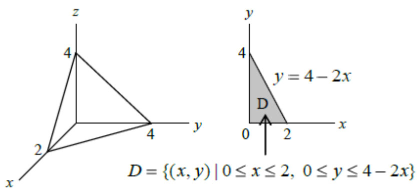
Dengan demikian, luas daerah D adalah

$$A = \iint_D dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} dy\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = [x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^2 = \frac{4}{3}$$

CONTOH 6 Tentukan volume tetrahedron yang dibatasi oleh bidang $z = 4 - 2x - y$ dan bidang koordinat.

Penyelesaian

Bangun tetrahedron yang dibatasi oleh bidang $z = 4 - 2x - y$ dan bidang koordinat diperlihatkan pada **Gambar 5.5**.



Gambar 5.5

Daerah pengintegralan (proyeksi bangun pada bidang *xoy*) berupa segitiga dan dapat dinyatakan oleh $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4 - 2x\}$. Dengan demikian, volume tetrahedron tersebut dapat ditentukan sebagai berikut.

$$V = \iint_D (4 - 2x - y)\,dA = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4 - 2x - y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 [4y - 2xy - \tfrac{1}{2}y^2]_0^{4-2x}\,dx = \int_0^2 (4(4-2x) - 2x(4-2x) - \tfrac{1}{2}(4-2x)^2)\,dx$$

$$= \int_0^2 (16 - 8x - 8x + 4x^2 - \tfrac{1}{2}(16 - 16x + 4x^2))\,dx$$

$$= \int_0^2 (8 - 8x + 2x^2)\,dx = [8x - 4x^2 + \tfrac{2}{3}x^3]_0^2 = \frac{16}{3}$$

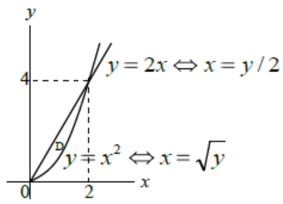
CONTOH 7 Hitung $\iint_D x^2 y dA$ dengan D adalah daerah yang dibatasi oleh garis $y = 2x$ dan $y = x^2$. Hitung integral ini dengan dua cara (berbeda urutan).

Penyelesaian

Daerah pengintegralan D seperti diperlihatkan pada **Gambar 5.6**. Daerah D ini dapat dinyatakan dalam dua cara sebagai berikut.

(1) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 4,\ y/2 \le x \le \sqrt{y}\}$



Gambar 5.6

Untuk $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$:

$$\iint_D x^2 y dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 y dy dx = \int_0^2 [\tfrac{1}{2} x^2 y^2]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 (2x^4 - \tfrac{1}{2} x^6) dx = [\tfrac{2}{5} x^5 - \tfrac{1}{14} x^7]_0^2 = \tfrac{128}{35}$$

Untuk $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 4,\ y/2 \le x \le \sqrt{y}\}$:

$$\iint_D x^2 y dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2 y dx dy = \int_0^4 [\tfrac{1}{3} x^3 y]_{y/2}^{\sqrt{y}} dx = \int_0^4 (\tfrac{1}{3} y^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{24} y^4) dx = [\tfrac{2}{21} y^{\frac{7}{2}} - \tfrac{1}{120} y^5]_0^4 = \tfrac{128}{35}$$

Perhatikan bahwa hasil akhirnya sama. Jadi, mengubah urutan pengintegralan tidak akan mengubah hasil akhir hasil pengintegralan.

CONTOH 8 Hitung $\int_0^2 \int_{x^2}^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dy dx$.

Penyelesaian

Pengintegralan dengan urutan seperti di atas sulit dilakukan. Oleh karena itu, kita ubah urutan pengintegralannya. Dari batas-batas pengintegralan di atas diperoleh daerah pengintegralannya adalah $D = \{(x, y) \mid x^2 \le y \le 4,\ 0 \le x \le 2\}$. Daerah ini diperlihatkan pada **Gambar 5.7**. Daerah ini juga dapat dinyatakan sebagai $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le x \le 4\}$. Dengan demikian, menghitung integralnya sebagai berikut.

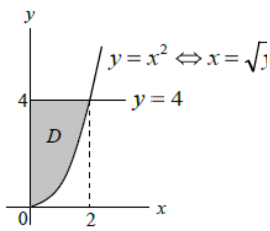
$$\int_0^2 \int_{x^2}^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dy dx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dx dy \quad (*)$$

Untuk mengintegralkan bagian dalam (terhadap *x*), gunakan metode substitusi:

$$u = x^4 + y^2 \to du = 4x^3 dx$$

dengan batas-batas: $x = 0 \to u = y^2$,

$$x = \sqrt{y} \to u = 2y^2$$



Gambar 5.7

Dengan demikian, diperoleh

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dx dy = \int_0^4 \int_{y^2}^{2y^2} \tfrac{1}{4} u^{-1/2} du dy = \tfrac{1}{2} \int_0^4 [u^{1/2}]_{y^2}^{2y^2} dy = \tfrac{1}{2} \int_0^4 (\sqrt{2} - 1) y dy$$

$$= [\tfrac{1}{4} (\sqrt{2} - 1) y^2]_0^4 = 4(\sqrt{2} - 1)$$

Jadi,

$$\int_0^2 \int_{x^2}^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dy dx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dx dy = 4(\sqrt{2} - 1).$$