UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA

ECUACIONES DIFERENCIALES

FASE 3- UNIDAD 3

PRESENTADO POR:

YAMILE SERRANO ARO CÓDIGO: 37544661

OSCAR MAURICIO MELO CÓDIGO 80.452.627

MARTHA LILIANA IDROBO CÓDIGO 1061748588

DIEGO FERNANDO MUÑOZ ARANA CÓDIGO: 72.226.591

GRUPO: 100412_4

TUTOR:

MARCELA ALEJANDRA PRADO

ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS TECNOLOGIA E INGENIERIA

INTRODUCCION

Con el desarrollo del presente trabajo colaborativo estaremos dejando en evidencia los conocimientos adquiridos durante el estudio de la unidad numero 3 del curso de ecuaciones diferenciales mediante la solución de problemas propuestos en la guía de trabajo; además nos ayuda a adquirir destrezas y habilidades inter personales para lograr un trabajo con un alto desempeño en equipo.

Conscientes de la importancia de las ecuaciones diferenciales donde se brinda una formación sobre los modelos matemáticos de ecuaciones y sus soluciones aplicadas en las diferentes disciplinas del saber cómo la ingeniería, la física, y la ciencia entre otras, en la presente actividad se pretende demostrar la aplicación del estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior, estudio de series y funciones especiales, mediante la resolución de series de Taylor, Estudiadas en la unidad tres del curso Ecuaciones diferenciales

Además se busca la interacción grupal para compartir conocimientos, aclarar dudas y dar solución a los problemas propuestos en la guía de trabajo colaborativo

OBJETIVOS

Aprender la parte teoría y práctica del estudio de series y funciones especiales para la solución de problemas en forma ágil, para lograr los objetivos propuestos en esta unidad.

Presentar la evidencia de los conocimientos adquiridos en la unidad 3 del curso ecuaciones diferenciales con la resolución de ejercicios de series de potencias especiales, funciones especiales y series matemáticas. aplicando la técnica de series de Taylor.

Implementar competencias que permitan comprender y utilizar las diferentes técnicas analíticas y cualitativas para resolver ecuaciones diferenciales en sistemas simples y predecir su comportamiento con el fin de ser aplicados en nuestro desempeño profesional.

DESARROLLO DEL TRABAJO

Temática: ecuaciones diferenciales y solución por series de potencias

1. Resolver el problema de valor inicial a través del método de series de Taylor:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}, \qquad y(0) = 1$$

Replanteamos la ecuación (1)

$$y(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Aplicamos método de Taylor

Calculamos las derivadas sucesivas evaluándolas en $\mathrm{x} = 0$

$$y''(\mathrm{x}) = -2\mathrm{x}e^{-x^2} \rightarrow y''(0) = 0$$

$$y'''(\mathrm{x}) = (4\mathrm{x}^2 - 2)e^{-x^2} \rightarrow y'''(0) = -2$$

$$y^{Iv}(\mathrm{x}) = (8\mathrm{x}^3 + 12\mathrm{x})e^{-x^2} \rightarrow y^{IV}(0) = 0$$

$$y^{v}(\mathrm{x}) = (16\mathrm{x}^4 - 48\mathrm{x}^2 + 12)e^{-x^2} \rightarrow y^{V}(0) = 12$$

Notamos que $y(0) = y^{(0)}(0) = 1$ y $y'(0) = 0$

Reemplazamos

$$y(\mathrm{x}) = 1 + \mathrm{x} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots \quad \rightarrow \quad (2)$$

Suponiendo que la ecuación (1) tiene una solución en series de potencias

$$y(\mathrm{x}) = \sum_{x=0}^{\infty} a_n\ x^n \rightarrow (3)$$

Entonces cuando $\mathrm{x} = 0$ en la ecuación (3) imponiendo la condición inicial obtenemos:

$$\mathrm{u}(0) = 1 = a_0$$

Diferenciando la ecuación (3) se obtiene:

$$y^t(\mathrm{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \; x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \rightarrow (4)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)x^{2n}}{n!} \rightarrow \qquad (5)$$

Reemplazamos (4) y (5) en (1) tenemos:

$$y^t(\mathrm{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \; x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

En forma equivalente

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots. = 1 - \mathrm{x}^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\frac{1}{3}, \qquad a_4 = 0 \quad a_5 \frac{1}{10}, \qquad a_6 = 0, \ldots..$$

En general, se tiene $a_{2n} = 0$

$$a_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!} \qquad n = 1,2,3, \ldots \ldots \ldots$$

De acuerdo con lo anterior, se tiene que la solución en series de potencias viene dada por

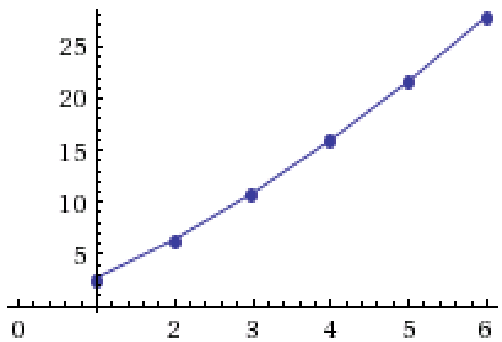
$$y(\mathrm{x}) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \qquad \rightarrow \qquad La\ serie\ converge\ para\ todo\ x\ real.$$

2. Revisar la convergencia de las siguientes series

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

La serie diverge según el criterio del límite como se puede ver en la gráfica:



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} = Ind$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

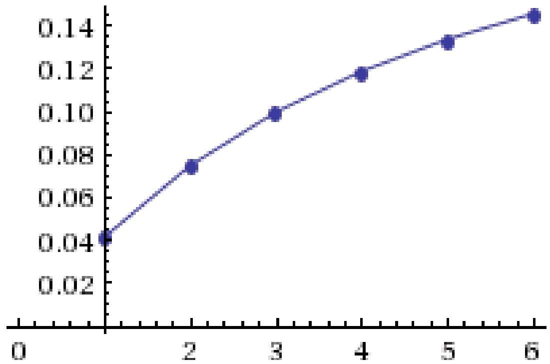
La prueba de la relación no es apropiada para este caso, es necesario emplear el criterio de comparación bajo el cual la serie si tiene convergencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}$$

La fórmula de la suma parcial para esta serie que converge es:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{m^2+m}{4(m+2)(m+3)}$$

Adicionalmente es posible verificar esta condición gráficamente:



Se observa que es con el aumento de n el valor obtenido de la serie tiende a converger en un valor, en este caso ¼.

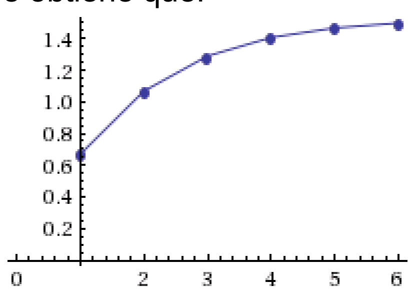
D)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

La serie converge a un valor irracional (1.5289):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n + 1)} \cong 1.5289$$

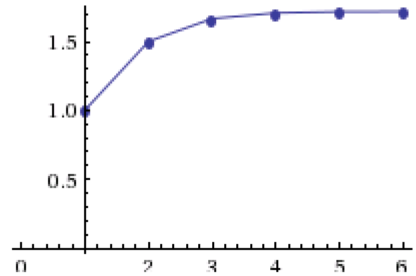
La forma de hallar esta valor y verificar la convergencia de la serie es empleando el método gráfico, ya que de lo contrario la solución es demasiado complicada. Por medio del método grafico se obtiene que:



E)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

La serie converge empleando la prueba de la relación, en este caso esta se complementa con el método grafico para evaluar el límite de convergencia de la serie n el infinito. En este orden de ideas se llega a que:



Adicionalmente es posible determinas el valor de convergencia de la serie como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)} \cong 1.71828$$

O también puede expresarse de una forma más precisa como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)} = e - 1$$

3. Hallar la solución general de la siguiente ecuación como una serie de potencial alrededor del punto x=0.

$$y' + 2yx = 0$$

La expansión empleando series de taylor para esta ecuación diferencial en el punto x=0 surge de combinar las siguientes series:
La serie de taylor en x=0 para el término y' está dado por:

$$(0\ \&) + 0\ \&\ y + \frac{1}{2}\ (0\ \&)\ y^2 + \frac{1}{6}\ (0\ \&)\ y^3 + \frac{1}{24}\ (0\ \&)\ y^4 + \frac{1}{120}\ (0\ \&)\ y^5 + O(y^6)$$

Para el caso del término 2xy se tiene que:

$$2\,x\,y + O(x^6)$$

Con esto es posible entonces acoplar las dos series, de este proceso se puede despejar la solución de la ecuación diferencial que en este caso corresponde a:

En la forma de serie queda como:

$$1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^5)$$

De donde es posible deducir que:

$$y(x) = c_1\, e^{-x^2}$$

4. Resolver por series la ecuación diferencial

$$y'' - (x+1)y' + x^2 y = x \; con\; y(0) = 1 \;, y'(0) = 1$$

$$y'' - (x+1)y' + x^2 y = x \qquad con \quad y(0) = 1 \; y'(0) = 1$$

Para solucionar esta ecuación diferencial se puede hacer uso de la serie de taylor para y’’ como:

$$(0\;\&) + 0\;\&\; y + \frac{1}{2}\,(0\;\&)\; y^2 + \frac{1}{6}\,(0\;\&)\; y^3 + \frac{1}{24}\,(0\;\&)\; y^4 + \frac{1}{120}\,(0\;\&)\; y^5 + O\left(y^6\right)$$

Adicionalmente para $(x+1)$ se tiene que:

$$1 + x + O\left(x^6\right)$$

Mientras que para el término $x^2 y$:

$$x^2\, y + O\left(x^6\right)$$

Es posible también hacer uso de las series de taylor para y’ empleadas en el punto anterior para dar solución al caos actual.

Con estas series y su respectivo acoplamiento es posible entonces hallar la solución a la ecuación diferencial de forma aproximada como:

Para facilitar las cosas es posible reacomodar los términos de la ecuación diferencial antes de darle solución de la siguiente manera:

$$\left(y''(X) - (x+1)\, y'(X) + x^2\, y(X)\right) \times \frac{1}{X} - 1 = 0$$

La forma extendida de la ecuación diferencial es:

$$\frac{x^2\, y(X)}{X} - \frac{x\, y'(X)}{X} + \frac{y''(X)}{X} - \frac{y'(X)}{X} - 1 = 0$$

Finalmente es posible llegar a la solución que es de la forma:

$$y(X) = c_1\, e^{\frac{1}{2}\left(-\sqrt{-3x^2+2x+1}+x+1\right)X} + c_2\, e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{-3x^2+2x+1}+x+1\right)X} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{X}{x^2}$$

Donde según las condiciones de frontera se tendrían un sistema como el siguiente que es linealmente dependiente, esto quiere decir que se tienen infinitas soluciones:

$$1 = c1 + c2$$

$$1 = \frac{c1}{2} + \frac{c2}{2}$$

5. Solución en forma de serie de potencias en torno a un punto ordinario

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$$

$x^2y'' + xy' + y = 0$

La hipótesis

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n$$

$$(x^2 + 1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n X^{n-2} + X\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, X^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n X^n + X\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n X^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n\, X^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, X^n$$

$$= 2\, C_2 X^0 - C_0 X^0 + 6C_3\, X + C_1\, X - C_1\, X + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n X^n$$
$$+ \sum_{n=\Delta}^{\infty} n(n-1)C_n X^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n\, C_n X^n - \sum_{n=2}^{\infty} n\, C_n X^n$$

EN:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n X^n \ \rightarrow K = n$$

$$\sum_{n=\Delta}^{\infty} n(n-1)C_n X^n \ \rightarrow K = n-2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\, C_n X^n \ \rightarrow K = n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n X^n \ \rightarrow K = n$$

Entonces:

$$= 2\, C_2 - C_0 + 6C_3\, X + \sum_{K=2}^{\infty}[K(K-1)C_K + (K+2)(K+1)C_{K+2} + K\, C_K - C_K]X^K$$

$$= 2\, C_2 - C_0 + 6C_3\, X + \sum_{K=2}^{\infty}[(K+1)(K-1)C_K + (K+2)(K+1)C_{K+2}]X^K = 0$$

Entonces:

$$2\, C_2 - C_0 = 0 \ \rightarrow \ C_2 = \frac{C_0}{2}$$

$$C_3 = 0$$

$$(K+1)(K-1)C_K + (K+2)(K+1)C_{K+2} = 0$$

$$C_{K+2} = \frac{1-K}{K+2} C_K \;\; con \;\; K = 2,3,4,,,$$

LUEGO

$$C_4 = -\frac{1}{4} C_2 = \frac{-1}{2.4} C_0 = \frac{-1}{2^2 .\, 2!}$$

$$C_5 = -\frac{2}{5} C_3 = 0$$

$$C_6 = -\frac{3}{6} C_4 = \frac{3}{2.4\,.6} C_0 = \frac{-1.\,3}{2^3 .\, 3!} C_0$$

$$C_7 = -\frac{4}{7} C_5 = 0$$

$$C_8 = -\frac{5}{8} C_6 = \frac{3\,.\,5}{2.4\,.6\,.8} C_0 = \frac{-1\,.\,3\,.\,5}{2^4 .\, 4!} C_0$$

$$C_9 = -\frac{6}{9} C_7 = 0$$

$$C_{10} = -\frac{7}{10} C_8 = \frac{3\,.\;5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8.\,10} C_0 = \frac{1\,.\,3\,.\,5.\,7}{2^4 .\, 4!} C_0$$

De lo anterior se tiene que:

$$Y = C_0 + C_1\, X + \; C_2\, X^2 + C_3\, X^3 + C_4\, X^4 + C_5\, X^5 + \cdots \dots ..$$

$$= \; C_1\, X + \; C_0 \left[1 + \frac{1X^2}{2} - \frac{1}{2^2\; 2!} X^4 + \frac{1\,.\,3}{2^3\; 3!} X^6 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^4\; 4!} X^8 + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2^5\; 5!} X^{10} + \cdots \dots \dots \right]$$

Luego la solución sería:

$$Y_1(X) = C_0 \left[1 + \frac{1X^2}{2} + \sum_{N=2}^{\infty} (-1)^{N-1} \frac{1\,.\,3.\,5\;(2n-3)}{2^n n!} X^{2n} \right];\; |x| < 1$$

PROBLEMA PLANTEADO

Se lanza un cuerpo de masa m hacia arriba de la tierra con velocidad inicial v_0. Suponiendo que no hay resistencia del aire, pero tomando en cuenta la variación del campo gravitacional con la altura, encontrar la menor velocidad inicial v_0 que necesita el cuerpo para que no regrese a la tierra. Esta velocidad inicial v_0 se le llama velocidad de escape. (Ver figura 1.)

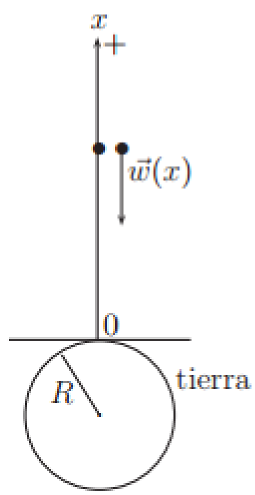


figura 1.

SOLUCIÓN

La energía mecánica de un objeto en órbita es: $Em = \frac{1}{2}mv^2 - GM\frac{m}{R}$

En donde

v = velocidad orbita

g= gravedad

M = masa de la tierra,

m = masa del objeto

R = radio de la tierra

El objeto se mantiene en órbita mientras su energía mecánica es negativa.

$$m = \frac{dv}{dt} - \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

$\rightarrow$ donde el signo $(-)$indica que la direccion de la fuerza es hacia el centro de la tierra.

La velocidad crítica para que escape de la influencia de la gravedad se alcanza cuando la energía mecánica sea nula. No tiene energía para regresar, eventualmente, a la Tierra.

Cancelando m, y resolviendo la ecuación diferencial resultante y poniendo como condiciones iniciales, en t = 0, x = 0 y v = v0,

Se llega a que: $v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R} \geq 0$

Por lo tanto $v_0^2 \geq 2gR$

De donde deducimos la expresión de la velocidad de escapees:

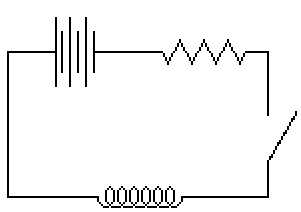
$$v = \sqrt{(2gR)} = \sqrt{(2 * 9.80\, m/s^2 * 6{,}37 * 10^6 m)} = 11.174.\, m/s$$

$\boldsymbol{v = 40.226\ km/h\ aproximadamente}$

PROBLEMA PROPUESTO

Calcular la intensidad que circula por el circuito esquematizado en la figura adjunta con la condición I = 0, para t = 0 y suponiendo que la fuerza electromotriz es constante.

Puesto que tenemos un circuito con resistencia y autoinducción, su ecuación diferencial será de la forma:



R·*I*+*L*·*dIdt*=*E*(*t*)

Tenemos una ecuación diferencial que no es diferencial exacta, por lo que para resolverla hemos de obtener previamente el factor integrante:

μ(*t*)=1*P*0·exp∫*P*1*P*0·*dt*=1*L*·exp∫*RL*·*dt*=1*L*·*eRt*/*L*

A partir de ahí podemos obtener la solución general mediante:

$$I(t)=1\mu P0\cdot\exp\int\mu\cdot R(t)\cdot dt+C\mu P0=e-Rt/L\int 1L\cdot eRt/L\cdot E(t)dt+C\cdot e-Rt/L$$

Si E(t) es constante, la ecuación se integra fácilmente, ya que se tiene:

$$I(t)=ER\cdot e-Rt/L\int RL\cdot eRt/L\cdot dt+C\cdot e-Rt/L=ER+C\cdot e-Rt/L$$

Y siendo I = 0 para t = 0

$$0=ER+C \quad\Rightarrow\quad C=-ER \quad\Rightarrow\quad I(t)=ER(1-e-Rt/L)$$

CONCLUSION

Para finalizar, gracias a este trabajo nos permite comprender los análisis de las ecuaciones diferenciales, lineales homogéneas con coeficientes constantes y diferenciales lineales no homogéneas, ecuación diferencial por el método de variación de parámetros, ecuaciones diferenciales por el método de coeficientes indeterminados, soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial y sus aplicaciones los cuales se ven reflejadas en ejemplos de nuestro diario vivir.

BIBLIOGRAFIA

Campos, B., Chiralt, C. (2011). Ecuaciones diferenciales. Departamento de Matemáticas Universidad Jaume I. Castellón de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I.Leer páginas 115 a 118 ISBN: 978-84-693-9777-0
Recuperado de: http://www.etnassoft.com/biblioteca/fundamentos-matematicos-de-la-ingenieria/

Cuartas, R., (2011). Módulo 4: ecuaciones diferenciales de orden superior. [Videos]. Disponible en http://aula.tareasplus.com/Roberto-Cuartas/ECUACIONES-DIFERENCIALES

Escobar, J. (2004). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en maple. Leer páginas 81 a 100. Texto completo en http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/

Zill, D. Cullen, M. (2009). Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera. Séptima Edición, México, Cengage Learning. Leer páginas 117 a 174